Université Paris-Diderot | Année 2014-2015
MM1 - Algèbre et analyse élémentaires I | Section C

# Feuille de TD 1 - Les nombres complexes

**Questions du cours.**

(a) Donner la définition de nombre complexe sous forme cartésienne (ou algébrique).
(b) Donner la définition de partie réelle et imaginaire d'un nombre complexe.
(c) Définir la somme et le produit de deux nombres complexes sous forme cartésienne.
(d) Définir le conjugué et le module d'un nombre complexe.
(e) Que signifie « deux nombres réels $a$, $b$ sont équivalents modulo $h \in ]0, +\infty[$ » ?
(f) Donner la définition d'argument d'un nombre complexe.
(g) Décrire les formes trigonométrique et exponentielle d'un nombre complexe.
(h) Décrire le produit de deux nombres complexes sous forme exponentielle.
(i) Donner la formule de résolution d'une équation de second degré à coefficients complexes. Quel est le discriminant d'une telle équation ?
(j) Décrire la méthode cartésienne pour trouver les racines carrées d'un nombre complexe.
(k) Décrire la méthode exponentielle pour trouver les racines $n$-ièmes d'un nombre complexe.
(l) Donner la définition de racine primitive de l'unité.
(m) Énoncer les formules d'Euler.
(n) Énoncer la formule de Moivre.
(o) Soit $n$ un entier, définir $n!$, *i.e.* « factoriel n ». Définir les coefficients binomiaux.
(p) Énoncer la formule du binôme de Newton.

**Exercice 1.** Écrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

(a) $\dfrac{2}{1-2\mathrm{i}}$, (b) $\dfrac{1}{1-2\mathrm{i}} + \dfrac{1}{1+2\mathrm{i}}$, (c) $\dfrac{2+\mathrm{i}}{3-2\mathrm{i}}$,

(d) $\left(\dfrac{1+\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}\right)^2$, (e) $\dfrac{2+5\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} + \dfrac{2-5\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$, (f) $\dfrac{2+5\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} - \dfrac{2-5\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$.

**Exercice 2.** Calculer le module et un argument des nombres complexes suivants :

(a) $-3\sqrt{2}$, (b) $\pi\mathrm{i}$, (c) $\sqrt{3}-\mathrm{i}$,

(d) $(1-\mathrm{i})^9$, (e) $(\sqrt{5}-\mathrm{i})(\sqrt{5}+\mathrm{i})$, (f) $e^{3+4\mathrm{i}}$.

**Exercice 3.** Écrire sous forme trigonométrique et exponentielle les nombres complexes suivants :

(a) $-3\sqrt{2}$, (b) $\pi\mathrm{i}$, (c) $\sqrt{3}-\mathrm{i}$,

(d) $(\mathrm{i}-1)^9$, (e) $\sqrt{2}+\sqrt{6}\mathrm{i}$, (f) $\dfrac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{3}+\mathrm{i}}$,

(g) $\mathrm{i}+\sqrt{2}e^{-\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$, (h) $e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} + e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$, (i) $\sqrt{3\mathrm{i}} + e^{-\mathrm{i}\pi}$,

(j) $3+4\mathrm{i}$, (k) $x + x^2\mathrm{i}$, $x \in \mathbb{R}$.

**Exercice 4.** Déterminer les nombres complexes $z$ tels que :

(a) $|\overline{z} - \mathrm{i}| = 1$,
(b) $z^2 = \overline{z}$,
(c) $z\overline{z} = z^3$,
(d) $\mathrm{i}\,\mathrm{Re}(z^2) - \mathrm{Im}(z^2) = z$,
(e) $z^2 + \overline{z} - 1$ est réel,
(f) $z^2 + 2\overline{z} - 2$ est imaginaire pur,
(g) $\arg(z + 2\overline{z}) = \frac{\pi}{3} \mod 2\pi$.

**Exercice 5.** Soit $\theta \in \mathbb{R}$ un nombre réel. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :
(a) $z^2 - 2\cos(\theta)z + 1 = 0$,
(b) $z^4 - 2\cos(2\theta)z^2 + 1 = 0$.

**Exercice 6.** Soient $z_1 = 3\sqrt{2}(1 + \mathrm{i})$, $z_2 = \sqrt{3} + \mathrm{i}$.
(a) Déterminer les formes exponentielle et trigonométrique de $z_1$ et $z_2$.
(b) Déterminer la forme cartésienne de $z = \frac{z_1}{z_2^2}$.
(c) Déterminer les formes exponentielle et trigonométrique de $z$.
(d) En déduire les valeurs de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

**Exercice 7.** Soit $w = 1 + \mathrm{i}$.
(a) Déterminer les racines carrées de $w$ sous forme cartésienne.
(b) Déterminer les formes exponentielle et trigonométrique de $w$ et ses racines carrées.
(c) En déduire les valeurs de $\cos \frac{\pi}{8}$ et $\sin \frac{\pi}{8}$.

**Exercice 8.** Trouver les racines carrées complexes des nombres suivants :

(a) $1$,
(b) $\mathrm{i}$,
(c) $-1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$,
(d) $1 + \mathrm{i}$,
(e) $6 - 8\mathrm{i}$,
(f) $\mathrm{i} - 2$,
(g) $2e^{\mathrm{i}2\pi/5}$,
(h) $-5 - 12\mathrm{i}$.

**Exercice 9.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

(a) $z^2 - \mathrm{i}z + 2 = 0$,
(b) $(3 - \mathrm{i})z^2 + (4\mathrm{i} - 2)z - 8\mathrm{i} + 4 = 0$,
(c) $z^2 + 2\mathrm{i}z - 1 = 0$,
(d) $z(z - \mathrm{i}) = \mathrm{i}z + 2$,
(e) $z^2 - 3z + 3 + \mathrm{i} = 0$,
(f) $z^4 + 2z^3 + 4z^2 = 0$,
(g) $z^3 - 3z^2 + 4z - 2 = 0$.

**Exercice 10.** Exprimer comme produit de facteurs linéaires les polynômes suivants :

(a) $\mathrm{i}z^2 - 1$,
(b) $z^2 - 3z + 2$,
(c) $z^4 + 1$,
(d) $z^4 - 3\mathrm{i}z^3 - (1 + 3\mathrm{i})z^2$,
(e) $z^3 + z^2 + z + 1$,
(f) $2z^2 + \mathrm{i}z - 3$,
(g) $z^2 - 2z + 4\mathrm{i}$,
(h) $\mathrm{i}z^3 + (1 - 2\mathrm{i})z^2 + 2(\mathrm{i} - 1)z + 2$.

**Exercice 11.** (a) Déterminer les formes trigonométriques et exponentielles des racines 5-èmes de l'unité.
(b) Dessiner de façon approximative les racines 5-èmes de l'unité dans le plan cartésien.
(c) Soit $z = x + \mathrm{i}y$ une racine 5-ème de l'unité. Trouver les valeurs possibles pour $y/x$.
(d) En déduire les valeurs de $\tan \frac{\pi}{5}$ et $\tan \frac{\pi}{10}$.

(e) En utilisant le fait que $x^2 + y^2 = 1$, déterminer les formes cartésiennes des racines 5-èmes de l'unité.

(f) En déduire les valeurs de $\cos \frac{\pi}{5}$, $\sin \frac{\pi}{5}$, $\cos \frac{\pi}{10}$ et $\sin \frac{\pi}{10}$.

**Exercice 12.** (a) Soit $\mu = (\sqrt{5} - 1 + \mathrm{i}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}})/4$. Montrer que $\mu = e^{\mathrm{i}2\pi/5}$.

(b) Écrire sous forme cartésienne $z = e^{\mathrm{i}\pi/3}$.

(c) Écrire $\mu/z$ sous forme trigonométrique, exponentielle et cartésienne.

(d) En déduire les valeurs de $\cos \frac{\pi}{15}$ et $\sin \frac{\pi}{15}$.

**Exercice 13.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

(a) $z^4 + 1 = 0$, (b) $z^5 + 1 = 0$, (c) $z^6 = \frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}$,

(d) $\overline{z}^2 - 2\mathrm{i}\overline{z} + \mathrm{i} = 0$, (e) $z^4 + 2z^2 + 4 = 0$, (f) $z^6 - 2\mathrm{i}z^3 - 1 = 0$.

À partir de (b), déduire les valeurs de $\cos \frac{\pi}{5}$ et $\sin \frac{\pi}{5}$.

**Exercice 14.** (a) Déterminer les formes cartésiennes, trigonométriques et exponentielles des racines 4-èmes de $1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$.

(b) En déduire les valeurs de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

**Exercice 15.** (a) Déterminer les formes cartésiennes, trigonométriques et exponentielles des racines 8-èmes de l'unité.

(b) Dessiner les racines 8-èmes de l'unité dans le plan cartésien, et décrire la figure obtenue en joignant les racines avec arguments consécutifs.

(c) Lesquelles sont des racines 8-èmes primitives ?

**Exercice 16.** (a) Donner une racine 6-èmes primitive de l'unité sous formes cartésienne et exponentielle.

(b) Vérifier que $2 + \mathrm{i}$ est une racine 6-ème de $w = -117 + 44\mathrm{i}$.

(c) Déterminer les formes exponentielle et cartésienne de toutes les racines 6-èmes de $w$.

(d) Dessiner les racines 6-èmes de $w$ dans le plan cartésien, et décrire la figure obtenue en joignant les racines avec arguments consécutifs.

**Exercice 17.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer :

(a) $(1 + \mathrm{i})^n + (1 - \mathrm{i})^n$, (b) $(1 + \mathrm{i})^n - (1 - \mathrm{i})^n$, (c) $\left(\frac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\right)^{2n}$.

**Exercice 18.** (a) Exprimer $\cos(2\alpha)$ et $\sin(2\alpha)$ en fonction de $\cos \alpha$ et $\sin \alpha$.

(b) Exprimer $\cos \frac{\alpha}{2}$ et $\sin \frac{\alpha}{2}$ en fonction de $\cos \alpha$ et $\sin \alpha$.

(c) Sachant que $\cos \frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ et $\sin \frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$, donner les valeurs de $\cos \frac{\pi}{10}$ et $\sin \frac{\pi}{10}$.

**Exercice 19.** En utilisant la formule du binôme de Newton, développer les expression suivantes :

(a) $(a + b)^6$, (b) $(x + \mathrm{i}y)^4$, (c) $(1 + \mathrm{i})^5$,

(d) $(1 - 2\mathrm{i})^3$, (e) $(10 + 1)^4$, (f) $(a + b + c)^3$.

**Exercice 20.** Exprimer en fonction de $\cos \alpha$ et $\sin \alpha$ les formules trigonométriques suivantes :

(a) $\cos(4\alpha)$, (b) $\sin(4\alpha)$, (c) $\cos(5\alpha)$,

(d) $\sin(5\alpha)$, (e) $\cos(3\alpha)\sin(3\alpha)$, (f) $\sin(6\alpha)$.

**Exercice 21.** Linéariser les formules trigonométriques suivantes :

(a) $\cos^3 \alpha$, (b) $\sin^3 \alpha$, (c) $\cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha$,

(d) $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha$, (e) $\cos^5 \alpha$, (f) $\sin^5 \alpha$.

**Exercice 22.** Exprimer en fonction de $\tan \alpha$ les formules trigonométriques suivantes :

(a) $\cos(2\alpha)$, (b) $\sin(2\alpha)$, (c) $\cos(4\alpha)$, (d) $\sin(4\alpha)$,

(e) $\tan(2\alpha)$, (f) $\tan(3\alpha)$, (g) $\tan(4\alpha)$, (h) $\tan(5\alpha)$.

**Exercice 23.** Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \sin(k\alpha)$.